

研究報告

非線形楕円型境界値問題に対する不安定解について*

学習院大学理学部 水 谷 明

一般に、不安定な平衡状態を捕らえることは難しい。本報告では、ある非線形楕円型境界値問題の不安定解（不安定な平衡状態）を効率よく構成する方法を提案し、その正当性を示す。また、数値実験により、その方法が実際に有効であることを確認する。

非線形楕円型境界値問題

平面上の有界領域 Ω の内部で、

$$-\Delta u = f(u), \quad u \geq 0 \quad (1)$$

を満たし、 Ω の境界 $\partial\Omega$ の上で、

$$u = 0 \quad (2)$$

となる $u=u(x,y)$ を求める、非線形楕円型境界値問題を考える。

ここで、非線形項 $f(u)$ は（一般化できるが、簡単のために）

$$f(u) = e^u - 1 - u \text{ とする。 } \Delta u \text{ は } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ を表す。}$$

境界値問題(1)(2)は、安定な自明解 $u \equiv 0$ の他に、不安定な解 $\bar{u} > 0$ を持つことが知られている。

以下、“Nehari変分原理”に基づく方法により、不安定解を構成する。

Nehari変分原理

$$F(s) = \int_0^s f(s)ds \text{ とおき、エネルギー } J(v) \text{ を、 } J(v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \iint_{\Omega} F(v) dx dy, (v \in H_0^1(\Omega)), \text{ により定める。}$$

u を解とし、(1)の両辺に u を掛けて部分積分を行うと

$$\iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \iint_{\Omega} f(u) u dx dy \quad (3)$$

が成り立つ。(3)を $\|\nabla u\|^2 = (f(u), u)$ と略記することにする。

集合 N を、 $N = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \|\nabla v\|^2 = (f(v), v), \Omega \text{ で } v \geq 0\}$ とおくと、上に述べたことから、 N は(1)(2)の不安定解をすべて含み、安定解を含まない。次のNehariによる定理が基

* 鈴木 貴氏（愛媛大学理学部）との共同研究である。

本的である。

『 N の中で $J(v)$ を最小にする不安定解 $u \in N$ が存在する：

$$J(u) = \inf_{v \in N} J(v) (= d > 0) \quad \text{』}$$

(この解 u を最小エネルギー解という。)

この定理は、エネルギー J を減少させる N の列があれば、不安定解を捕らえる可能性があることを示している。

逆巾法による反復列

N の中の列 $\{v_j\}$ を次のアルゴリズムにより定める。

アルゴリズム 出発値 $v_0 \in N$ を任意にとり、 $v_j \in N \mapsto v_{j+1} \in N$ ($j = 0, 1, 2, \dots$)

を次のように定める。

1. ポアソン方程式 $-\Delta w = f(v_j)$ in Ω , $w = 0$ on $\partial\Omega$ の解を w とする。
2. w の定数倍で、 N の元が一意的に存在するので、それを $v_{j+1} \in N$ と定める。

このようにして定めた列 $\{v_j\} \subset N$ は、エネルギー J を減少させる列で、次の結果が成り立つ。

定理 任意の部分列 $\{v_{j'}\} \subset \{v_j\}$ に対して、更に部分列 $\{v_{j''}\} \subset \{v_{j'}\}$ をとることにより、ある不安定解 $\tilde{u} \in N$ に収束させることができる： $v_{j''} \rightarrow \tilde{u}$ in $H_0^1(\Omega)$ 。

注意。 \tilde{u} は必ずしも最小エネルギー解ではない。

定理の証明は参考文献[1] を参照して戴きたい。

数値実験

図1, 2, 3のような、正方形 $(0,1) \times (0,1)$ から斜線部分を除いた3通りの領域に対して数値実験を行った。初期関数を $v_{-1}(x,y) \equiv 1$ として、 x,y 方向ともに128等分割した通常の有限要素法で計算を行った。左側の図は途中経過 ($j = 0, 3, 6, 9$) で、右側の図は数値的に収束した状態を示してある。図はすべて解の等高線 (高さ = 1, 2, 3, ...) である。

8, 16, 32, 64等分割に対する計算も行ったが、どの場合でも、反復列そのものが数値的に収束していた。64, 128等分割の最終状態は、殆ど完全に一致していた。図1の領域の場合、点対称な初期関数から出発しているので、誤差無しの計算であれば、対称な解が得るはずであるが、丸め誤差の影響でバランスが崩れ、エネルギーの低い第一モードの解に収束している。実際の計算では、丸め誤差は避けられないので、どのような場合でも、最小エネルギー解 (の近似解) に収束する

ように思える。

なお、『分割を細かくしたとき、有限要素解のある部分列は不安定解へ収束する』ことが示されているので、右側の図の最終状態はある不安定解の近似であることが保証されている。

謝辞 本研究は学習院大学計算機センター特別研究費を一部の援助として行われました。記して謝意を表します。

参考文献

- [1] A. Mizutani and T. Suzuki, "On the iterative and minimizing sequences for semilinear elliptic equations," (投稿中)

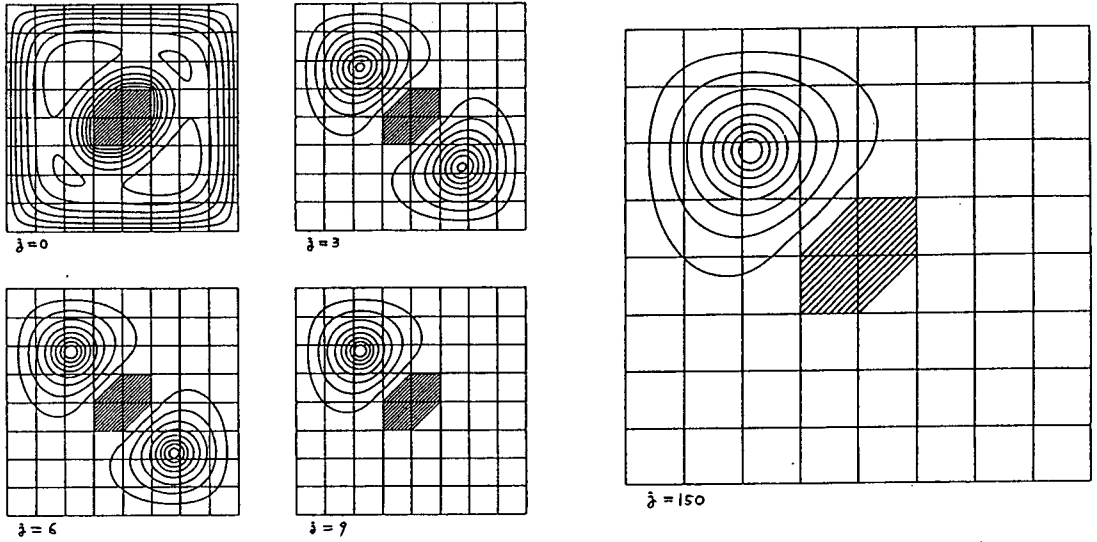


図 1

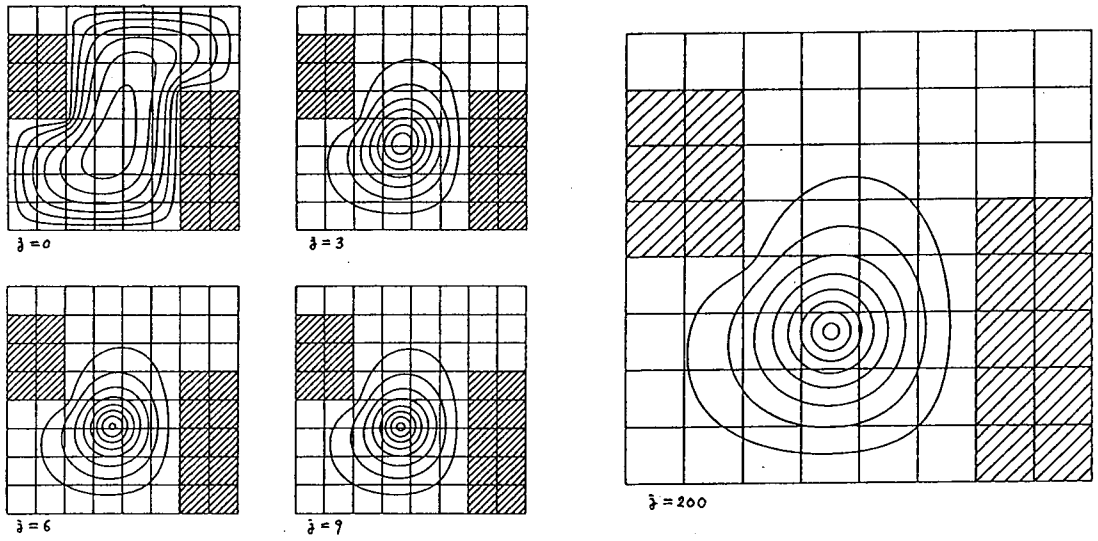
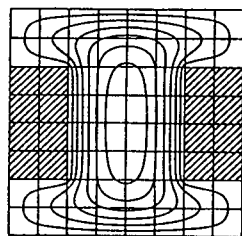
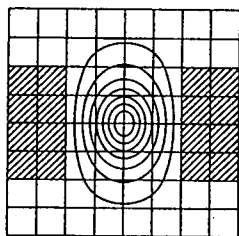


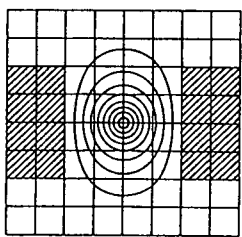
図 2



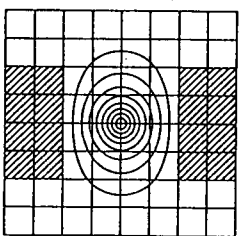
$j = 0$



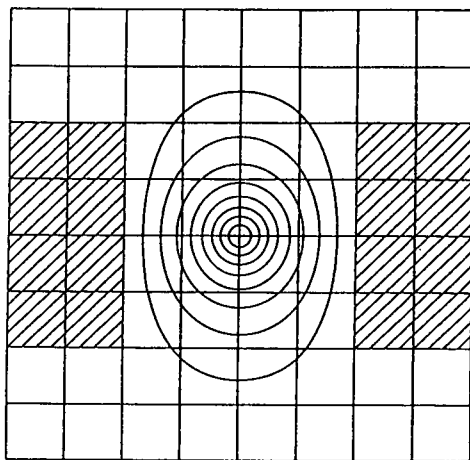
$j = 3$



$j = 6$



$j = 9$



$j = 40$

図 3